Μάθημα 22ο — 23/5/2018

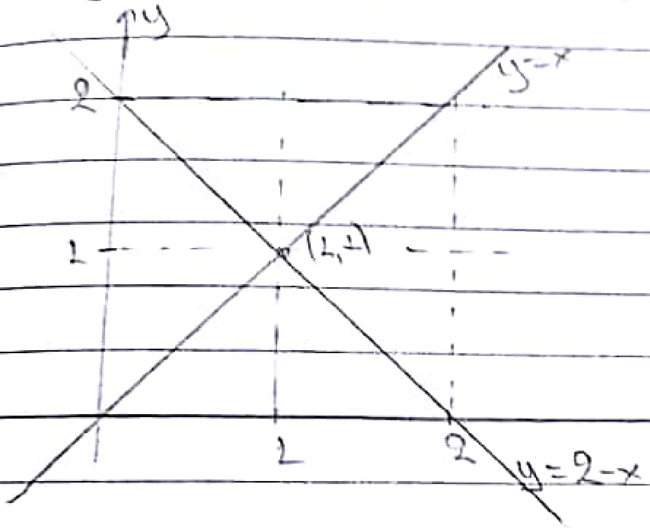
Θέματα Ιουνίου 2017

Θέμα 1: Για να υπολογίσουμε τη μάζα λεπτής επίπεδης πλάκας με πυκνότητα $p(x,y) = x^2 + y^2$ χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο:

$$m = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(a) Περιγράψτε το σχήμα της πλάκας

(b) Περιγράψτε τη μάζα με ένα μόνο διπλό ολοκλήρωμα και υπολογίστε την



Σχεδιάζω τα άκρα των ολοκληρωμάτων.

Αλλάζω τη σειρά ολοκλήρωσης

$$m = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx = \int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{(2-x)^3}{3}\right) - \left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right.$$

Θέμα 2: Ένα σωματίδιο κινείται στην τροχιά $\vec{r} = \cos(\omega t)i + \sin(\omega t)j$, όπου ω μια σταθερά. Να δείξετε ότι

(α) Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{r}$

(β) Η επιτάχυνση του $\vec{a}$ έχει φορά προς την αρχή των αξόνων και μέτρο ανάλογο της απόστασης $|\vec{r}|$

(γ) Το διάνυσμα $\vec{r} \times \vec{v}$ είναι σταθερό.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega \sin(\omega t)i + \omega\cos(\omega t)j$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = -\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) + \omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0$$

(β) $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2\cos(\omega t)i - \omega^2\sin(\omega t)j =$$

$$= -\omega^2(\cos(\omega t)j + \sin(\omega t)j)$$

$$= -\omega^2 r$$

(γ) $$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k}(\omega\cos^2(\omega t) + \omega\sin^2(\omega t))$$

$$= \hat{k} \cdot \omega.$$, σταθερό

Θέμα 3: Σε ένα μακρινό γαλαξία εξωγήινοι ετοιμάζουν την επίθεσή τους στη Γη. Οι ιπτάμενοι δίσκοι τους είναι κατασκευασμένοι από δύο παραβολοειδή, τα οποία έχουν ύψος h και ακτίνα a, που ενώνονται στη βάση τους, δηλαδή

$$z(x,y) = \pm h\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$$

, όπου το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί στην επάνω επιφάνεια και το αρνητικό στην κάτω.

(α) Υποθέτοντας ότι το υλικό που χρησιμοποιούν έχει σταθερή πυκνότητα ρ, βρείτε την πολική ροπή αδράνειας $I_o = I_x + I_y$ του δίσκου γύρω από τον άξονα z.

(β) Βρείτε τη μάζα M του δίσκου και δείξτε ότι $I_o = \frac{1}{3} M a^2$

(γ) Στον πλανήτη τους οι βαρυτικές δυνάμεις είναι της μορφής $\vec{F} = \frac{-45\vec{r}}{r^5}$, όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ και $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Βρείτε τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσουν ώστε να ελαχιστοποιήσουν την ενέργεια (έργο) που πρέπει να δαπανήσουν για να μετακινηθούν στο πεδίο από μια απόσταση r_1 σε μια απόσταση r_2. Ποιο είναι το ελάχιστο έργο που θα χρειαστούν?

Δίνεται $\nabla r^n = n r^{n-2}\vec{r}$

$$M = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-h\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)}^{h\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)} \rho \, dz\,dy\,dx$$

$$\vec{F} = -\nabla V = -nA\, r^{n-2}\cdot\vec{r} = \frac{-45}{r^5}$$

$$V = A\cdot r^n$$

$n-2=5 \Rightarrow n=3$ και $A=15$

$$V = 15\cdot\frac{1}{r^3}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = V(r_2) - V(r_1)$$

Θέμα 4: Δίνεται η συνάρτηση Lagrange, $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$, που αντιστοιχεί σε μονοδιάστατη κίνηση, όπου m και k σταθερές και $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$

(α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σύστημα

(β) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και περιγράψτε την κίνηση του συστήματος

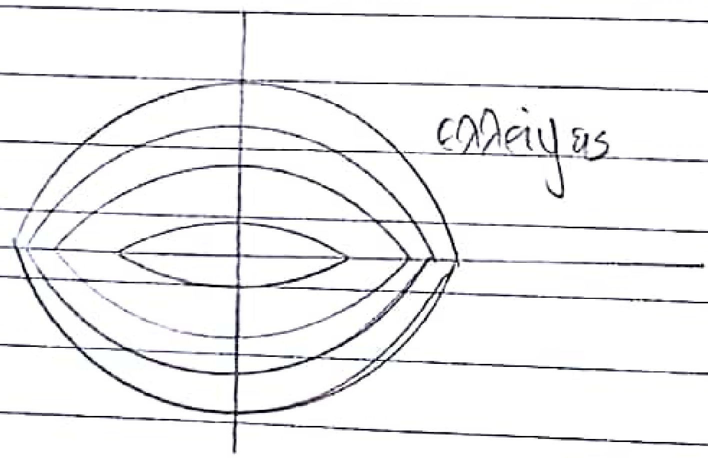
(γ) Περιγράψτε το φασικό χώρο του συστήματος

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2=T-V$$

$$F=-\frac{dV}{dx}=-kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \Rightarrow -kx-\frac{d}{dt}m\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x}+kx=0$$

$$\frac{m}{2}(\dot{x})^2+\frac{k}{2}x^2=E$$



Σεπτέμβριος 2017

Θέμα 5: Να βρεθεί μια αναγκαία συνθήκη ώστε μια συνάρτηση $y \in C[a,b]$ να είναι ακρότατο του συναρτησοειδούς
$J[y] = \iint_R K(s,t)y(s)y(t)\,ds\,dt + \int_a^b y(t)^2 dt - 2\int_a^b y(t)f(t)\,dt$, όπου

$K(s,t)$ είναι γνωστή συνεχής συνάρτηση επί του τετραγώνου $R: \{(s,t) : a \le s \le b,\ a \le t \le b\}$, $K(s,t) = K(t,s)$ και $f \in C[a,b]$

$$J[y] = \int_a^b \int_a^b K(s,t)y(s)y(t)\,ds\,dt + \int_a^b y(t)^2 dt - 2\int_a^b y(t)f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s,t)y(s)y(t)\,ds + y(t)^2 - 2y(t)f(t) \right] dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left[y(t) \underbrace{\int_a^b K(s,t)y(s)\,ds}_{g(t)} + y(t)^2 - 2y(t)f(t) \right]}_{L} dt$$